



Graphentheoretische Strukturanalyse von Input-Output-Tabellen

Seminararbeit

am

Seminar für Mikroökonomie und Empirische Wirtschaftsforschung
Wirtschafts- und Sozialwissenschaftliche Fakultät
Universität Freiburg



vorgelegt von

stud. math. Michael Beer
aus Trub
5. Fachsemester

Seminarleitung: Prof. Dr. Reiner Wolff
Abgabetermin: Februar 2000
Wintersemester 1999/2000

Anschrift des Verfassers:
Henzenmoos 41
3182 Überstorf



Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Theoretische Grundlagen	3
2.1	Binärisierung der Input-Output-Tabelle: Datenbedarf und Problematik der Filterschwelle	3
2.2	Analyse des gerichteten Graphen: Entfernungsmatrix	5
2.3	Strukturmasse I: Durchmesser, Dispersion, Durchschnittsdistanz und Radius	9
2.4	Einbezug des ungerichteten Graphen: Konnexitätsmatrix	11
2.5	Die Kondensation des Graphen: Gruppierung in bilaterale Komponenten	13
2.6	Wirtschaftspolitische Ansatzpunkte: Inputbasis und Mündungskomponenten	16
2.7	Strukturmasse II: Der Trade-Off zwischen Geschwindigkeit und Vollständigkeit	16
3	Praktische Anwendung	19
4	Zusammenfassende Bemerkungen	24
A	Literaturverzeichnis	25

1 Einleitung

Als Ergänzung zur quantitativen Analyse von Input-Output-Tabellen sind verschiedene Verfahren der qualitativen Input-Output-Analyse entwickelt worden. Eines davon – der 1972 von Prof. Dr. Lothar Czayka ([2]) formulierte und später von Prof. Dr. Hans-Werner Holub und Prof. Dr. Hermann Schnabl ([7]) weiterentwickelte klassische Ansatz – soll in dieser Seminararbeit dargelegt werden. Das Themengebiet beschränkt sich auf die Urversion der qualitativen Input-Output-Rechnung, ohne beispielsweise auf die von Holub, Schnabl und Tappeiner ([5]) angestellten Überlegungen zur Input-Output-Analyse mit variabler Filterschwelle einzugehen.

Mit dem Ziel, möglichst effiziente Ansatzpunkte für konjunkturfördernde wirtschaftspolitische Massnahmen zu bestimmen, befasst sich die qualitative Input-Output-Analyse mit den in Input-Output-Tabellen enthaltenen Strukturinformationen. Dabei wird von den vorhandenen quantitativen Informationen weitgehend abstrahiert. Dies erlaubt die Zuhilfenahme der Graphentheorie, um entsprechende Schlüsse ziehen zu können. Insbesondere kann so das Konzept der Ausbreitungsgeschwindigkeit und Vollständigkeit eines Nachfrageimpulses sehr einfach modelliert werden.

Der grösste Teil dieser Arbeit wird sich mit den theoretischen Grundlagen der klassischen qualitativen Input-Output-Analyse befassen, wobei Aufbau und Notationen grösstenteils an jene von Holub und Schnabl ([4]) respektive Hauke ([3]) angelehnt sind. Es geht hier darum, das notwendige Instrumentarium einzuführen und zu erläutern.

In einem zweiten Teil soll anschliessend eine entsprechende Analyse am Beispiel der Input-Output-Tabellen der Bundesrepublik Deutschland von 1970 und 1980 durchgeführt werden.

Schliesslich wird es möglich sein, die Stärken und Schwächen einer solchen Analyse zusammenfassend darzulegen und zu beurteilen.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Binärisierung der Input-Output-Tabelle: Datenbedarf und Problematik der Filterschwelle

Die hier darzustellende klassische qualitative Input-Output-Analyse stützt sich auf die Vorleistungsmatrix einer vorgegebenen Input-Output-Tabelle:

2.1.1 Notation: Wir bezeichnen mit $X = (x_{ij})_{i,j=1\dots n} \in M(n \times n; \mathbb{R}_{\geq 0})$ die vorgegebene $n \times n$ -dimensionale Vorleistungsmatrix mit nicht-negativen Einträgen. Die n betrachteten Wirtschaftssektoren werden mit $(s_i)_{i=1\dots n}$ notiert.

$M(n \times m; S)$ steht dabei allgemein für die Menge der $n \times m$ -dimensionalen Matrizen mit Koeffizienten aus S .

Während quantitative Analysen direkt von den in X dargestellten Lieferströmen ausgehen, interessiert im hier erläuterten Zusammenhang in erster Linie nicht die Grösse, sondern die Existenz respektive Vernachlässigbarkeit eines Lieferstroms. Ziel ist es, die Einträge der Vorleistungsmatrix so zu verdichten (zu binärisieren), dass ein möglichst realitätsnahes Bild der Verflechtungsstruktur der zu betrachtenden Volkswirtschaft erzeugt werden kann.

Es stellt sich dabei das Problem, dass in empirischen Input-Output-Tabellen sozusagen zwischen allen Sektoren gegenseitige Lieferbeziehungen bestehen, so dass die Frage nach der gesamtwirtschaftlichen Relevanz der einzelnen Ströme beantwortet werden muss.

Konkret heisst das, dass alle Einträge von X , welche eine gewisse, im Voraus festgesetzte **Filterschwelle** FS (auch Bagatellwert genannt) unterschreiten, vernachlässigt und als irrelevant betrachtet werden, während alle darüberliegenden Einträge gleichsam als relevant angesehen und weiterverfolgt werden. Die Grösse der in X verzeichneten Lieferströme spielt somit nur insofern eine Rolle, als sie in Verbindung mit der Filterschwelle den Ausschlag gibt, ob eine gewisse Verflechtung berücksichtigt wird oder nicht.

2.1.2 Definition: Unter der **Matrix der direkten Lieferbeziehungen** verstehen wir die Matrix $W = (w_{ij})_{i,j=1\dots n} \in M(n \times n; \{0, 1\})$, welche wie folgt definiert ist:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_{ij} > FS \text{ und } i \neq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist zu beachten, dass mit diesem Ansatz die Lieferströme eines Sektors an sich selbst von der Betrachtung ausgeschlossen werden. Zur Auswahl von wirtschaftspolitischen Ansatzpunkten interessieren allerdings in erster Linie die Beziehungen der Sektoren untereinander, so dass ein Einbezug dieser innersektoralen Lieferbeziehungen nicht zweckmässig wäre. Grundsätzlich werden im vorliegenden Modell jegliche Lieferzyklen ausgeklammert (vgl. auch Seite 7).

Wie unschwer festzustellen ist, beeinflusst die willkürliche Wahl der Filterschwelle FS das Ergebnis der Analyse entscheidend (vgl. Kleine und Meyer [6]). Problematisch wirkt sie sich insbesondere auf die Vergleichbarkeit von Input-Output-Tabellen mit verschiedenen grossen Einträgen aus. Als Ausweg liegt es auf der Hand, den Bagatellwert aus den vorliegenden Daten herzuleiten (zum Beispiel als Vielfaches des Mittelwertes der Lieferströme), statt ihn von vornherein festzulegen. Allerdings liessen eigene Versuche auch dieser Idee gegenüber Vorbehalte aufkommen, da kein allgemeingültiger Ansatz gefunden werden konnte. Die Aussage von Holub und Schnabl ([4, S. 185]), wonach eine auf das Dreifache des durchschnittlichen Wertestroms normierte Filterschwelle ein in der graphischen Abbildung immer noch recht komplexes Gebilde ergäbe, bestätigte sich bei der Analyse von aggregierten Vorleistungsmatrizen ebenso wenig.

Als gangbarer Weg entpuppte sich im vorliegenden Fall (vgl. Kapitel 3) die Idee, den Bagatellwert so zu wählen, dass eine festgelegte Anzahl der grössten Lieferströme berücksichtigt wird. Während so das allgemeine Wachstum der Volkswirtschaft ausser Acht gelassen wird, ergeben sich interessante Informationen über die Verschiebung der wichtigsten Verflechtungen im Zeitablauf.

Als Reaktion auf die oben genannte Kritik veröffentlichten Holub und Schnabl 1985 ([5]) einen neuen Ansatz, bei dem unterschiedliche Filterschwellen und mehrere Input-Output-Tabellen einbezogen werden, was zu einer so genannten qualitativen Input-Output-Analyse mit variablem Filter führt. Im Rahmen dieser Seminararbeit soll darauf allerdings nicht weiter eingegangen werden.

Beispiel: In einem (ursprünglich von Czayka ([2]) formulierten) Modellbeispiel wird von folgender Matrix der direkten Lieferbeziehungen ausgegangen:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2 Analyse des gerichteten Graphen: Entfernungs- und Dependenzmatrix

Um nun die oben konstruierte Lieferwege-Matrix W weiter behandeln zu können, führen wir einige Begriffe aus der Graphentheorie ein:

2.2.1 Definition: Ein **gerichteter Graph** besteht aus einer nichtleeren Menge G_S , einer Menge G_K und einer Abbildung $\Phi : G_K \longrightarrow G_S \times G_S$. Die Elemente von G_S und G_K werden **Knoten** beziehungsweise **Kanten** genannt, und Φ heisst die dem Graph zugehörige **gerichtete Inzidenzabbildung** (vgl. [1, S. 24]).

Wir betrachten hier nur endliche Graphen (d. h. $\text{card}(G_S), \text{card}(G_K) < \infty$), so dass sich die Menge der Knoten G_S grafisch mit einer Punktmenge und die Kantenmenge G_K mit einer Menge von Pfeilen identifizieren lässt, wobei letztere jeweils zwei Punkte aus G_S miteinander verbinden.

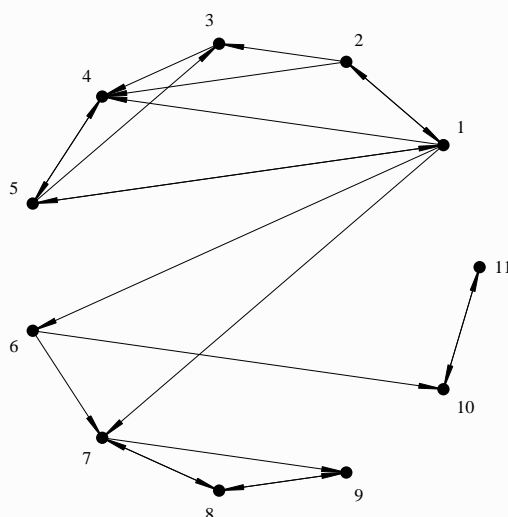
Es ist nun offensichtlich, dass zwischen der Menge der Graphen mit n Knoten und den quadratischen $n \times n$ -Matrizen $M(n \times n; \mathbb{N})$ mit nichtnegativen ganzzahligen Koeffizienten ein bijektiver Zusammenhang besteht: Ist $M = (m_{ij})_{i,j=1..n} \in M(n \times n; \mathbb{N})$ eine solche Matrix (genannt **Adjazenzmatrix**), so stellt m_{ij} die Anzahl Pfeile vom Punkt i zum Punkt j dar, und umgekehrt. Anders ausgedrückt, gibt m_{ij} die Anzahl Elemente von G_K an, welche durch Φ auf $(s_i, s_j) \in G_S \times G_S$ abgebildet werden, wobei unter s_i das i -te Element der Menge G_S zu verstehen ist.

Analog definiert man den Begriff des **ungerichteten Graphen**, indem man

statt Pfeile ungerichtete Strecken einführt. Die Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen ist notwendigerweise symmetrisch.

Die Matrix der direkten Lieferbeziehungen W lässt sich nun als Adjazenzmatrix eines Graphen interpretieren, welcher die Lieferverflechtungen der betrachteten Volkswirtschaft darstellt. Seine Knoten entsprechen dabei den in der Input-Output-Tabelle festgehaltenen Sektoren, die Kanten stellen die relevanten Lieferströme dar. Die grafische Vorstellung eines Wirtschaftssystems kann also als Matrix formal repräsentiert werden.

Im Modellbeispiel sieht der Graph wie folgt aus:



Der Einfachheit halber werden die Knoten mit i anstelle von s_i bezeichnet ($i = 1 \dots n$).

Nun sind zusätzlich zu den beschriebenen direkten auch die indirekten Lieferbeziehungen von Interesse. Um diese zu ermitteln, greifen wir auf den folgenden Satz zurück:

2.2.2 Satz: Sei $W = (w_{ij})_{i,j=1\dots n}$ die Adjazenzmatrix eines gerichteten Graphen. Dann gibt ein Koeffizient $w_{ij}^{(m)}$ der Matrix W^m die Anzahl Wege bestehend aus genau m Kanten vom Knoten s_i zum Knoten s_j an.

Beweis (vgl. [1, S. 110]): Wir beweisen den Satz durch vollständige Induktion über n :

w_{ik} stellt die Anzahl Kanten von s_i nach s_k , respektive w_{kj} jene von s_k nach s_j dar. Das Produkt $w_{ik}w_{kj}$ gibt demnach die Anzahl verschiedener Wege von s_i nach s_j ,

welche durch s_k führen, an. Summieren wir nun diese Produkte über alle k , so erhalten wir die Gesamtzahl von Wegen der Länge 2 (d. h. bestehend aus zwei Kanten) von s_i nach s_j : $w_{ij}^{(2)} := \sum_{k=1}^n w_{ik}w_{kj}$. Diese Summe ist allerdings nichts anderes als der entsprechende Koeffizient der Matrix W^2 .

Nehmen wir nun an, der Satz sei für die Matrix $W^{m-1} =: (w_{ij}^{(m-1)})_{i,j=1\dots n}$ bewiesen. Dann drückt $w_{ik}^{(m-1)}$ die Anzahl Wege der Länge $m-1$ von s_i nach s_k aus. Wiederum entspricht $w_{ij}^{(m)} := \sum_{k=1}^n w_{ik}^{(m-1)}w_{kj}$ (die Anzahl Wege der Länge m von s_i nach s_j) genau dem entsprechenden Koeffizienten der Matrix W^m . \square

Konkret stellt also die Matrix W^m die Anzahl Lieferwege der Länge m zwischen den verschiedenen Wirtschaftssektoren dar. Tritt nun in einer solchen Matrix W^m ein positives Diagonalelement auf, so lässt sich daraus schliessen, dass mindestens ein sogenannter **Lieferzyklus** (d. h. ein Lieferweg mit identischem Start- und Endsektor) existiert. Der Eindeutigkeit (von Weglängen zwischen Sektoren) halber ist es zweckmässig, solche Zyklen auszuschliessen und nur die **Lieferpfade**, definiert als kürzeste Verbindungen zwischen zwei Sektoren, zu betrachten. Ausserdem interessiert in erster Linie nicht die Anzahl, sondern die Länge solcher Lieferpfade. Denn in der weiteren Analyse wird es nicht von Bedeutung sein, auf welchen Wegen Lieferungen zwischen den Sektoren stattfinden können, sondern vielmehr wie weit die einzelnen Sektoren voneinander entfernt sind. Es wird der Begriff der Entfernungsmatrix eingeführt, welche ebendiese Lieferpfadlängen zum Ausdruck bringt:

2.2.3 Definition: Die **Entfernungsmatrix** $E = (e_{ij})_{i,j=1\dots n} \in M(n \times n; \{0, 1 \dots n-1\})$ wird wie folgt definiert:

$$e_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i = j \text{ oder } w_{ij}^{(m)} = 0 \quad \forall m \in \{1, \dots, n-1\} \\ \min_{1 \leq m \leq n-1} \{m : w_{ij}^{(m)} > 0\} & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $w_{ij}^{(m)}$ für den entsprechenden Koeffizienten der Matrix W^m steht.

Per Definition beträgt die maximal mögliche Länge eines Lieferpfads $n-1$, nämlich dann, wenn alle Sektoren linear hintereinander angeordnet sind, so dass vom ersten zum n -ten Knoten des Graphen genau $n-1$ Kanten durchlaufen werden müssen.

Es läge auf der Hand, die Entfernung von nicht verbundenen Sektoren als unendlich zu definieren. Durch die Zulassung des Wertes ∞ als Matrixkoeffizient würden allerdings die weiteren Rechenschritte unnötig erschwert, so dass

fehlende Lieferbeziehungen ausserhalb der Hauptdiagonalen per Konvention durch Nullkoeffizienten ausgedrückt werden.

In unserem Beispiel erhalten wir die folgende Entfernungsmatrix:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Eintrag $e_{49} = 4$ bedeutet beispielsweise, dass der Lieferpfad vom Sektor s_4 zum Sektor s_9 im Graphen aus vier Kanten besteht. Es müssen also drei weitere Sektoren durchlaufen werden, nämlich s_5 , s_1 und s_7 .

Aus der Entfernungsmatrix ist nun unmittelbar ersichtlich, zwischen welchen Sektoren (direkte oder indirekte) Lieferbeziehungen existieren. Diese Information lässt sich in der Dependenzmatrix darstellen:

2.2.4 Definition: Die **Dependenzmatrix** $C = (c_{ij})_{i,j=1\dots n} \in M(n \times n; \{0, 1\})$ wird wie folgt definiert:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } e_{ij} > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei e_{ij} für den entsprechenden Koeffizienten der Entfernungsmatrix E steht.

Die äusserlich einander recht ähnlich sehenden Matrizen W und C unterscheiden sich insofern, als dass die Adjazenzmatrix W nur die direkten, die Dependenzmatrix C allerdings die direkten und indirekten Lieferverflechtungen zum Ausdruck bringt.

Die Dependenzmatrix des Modellbeispiels:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3 Strukturmasse I: Durchmesser, Dispersion, Durchschnittsdistanz und Radius

Ausgehend von den auf diese Weise gewonnenen Dependenz- und Entfernungsmatrizen können wir eine Reihe von Strukturkennziffern des vorliegenden Graphen bestimmen. Wo angebracht sind im Folgenden die entsprechenden Werte des Modellbeispiels mit angegeben.

2.3.1 Definitionen: Seien e_{ij} und c_{ij} die Koeffizienten der Matrizen E beziehungsweise C .

	Bsp.
$DM := \max_{i,j=1\dots n} \{e_{ij}\}$ heisst Durchmesser des Graphen.	6
$D_k^K := \sum_{i=1}^n e_{ik} + \sum_{j=1}^n e_{kj}$ heisst Knotendispersion des Knotens s_k ($k = 1 \dots n$).	
$D^G := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e_{ij}$ heisst Gesamtdispersion des Graphen.	147
$D^d := \frac{D^G}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}}$ heisst durchschnittliche Distanz der Sektoren.	2.33
$R_k^I := \max_{i=1\dots n} e_{ik}$ heisst Input-Radius des Knotens s_k ($k = 1 \dots n$).	

$R_k^O := \max_{j=1 \dots n} e_{kj}$ heisst **Output-Radius** des Knotens s_k
 ($k = 1 \dots n$).

$\bar{R}^I := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n R_k^I$ heisst **durchschnittlicher Input-Radius** des Graphen. 3.73

$\bar{R}^O := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n R_k^O$ heisst **durchschnittlicher Output-Radius** des Graphen. 2.73

$R_k^I = DM \iff s_k$ heisst **Mündungssektor**.

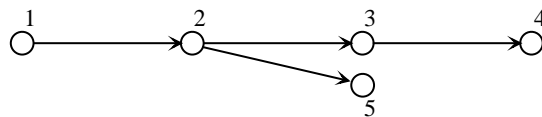
$R_k^O = DM \iff s_k$ heisst **Quellsektor**.

Mündungs- und Quellsektoren werden auch als **periphere Sektoren** bezeichnet.

Diese Massgrössen charakterisieren zu einem gewissen Grad Struktur und Zusammenhang des Graphen und eignen sich vor allem für Vergleichszwecke. Kleinere Werte für Durchmesser, Dispersion und Radien deuten tendenziell auf einen engeren Zusammenhang des Graphen und eine grössere Verflechtungsdichte der Volkswirtschaft hin.

Es ist hier zu bemerken, dass die obige, von Holub und Schnabl ([4, S. 191]) vorgeschlagene Definition der Mündungs- und Quellsektoren relativ ungeschickt gewählt ist, weil sie erstens nicht der Intuition entspricht und zweitens von den Autoren selbst im Weiteren offensichtlich anders ausgelegt wird.

Betrachten wir beispielsweise den folgenden Graphen:



Bei einem Durchmesser von $DM = 3$ ist s_5 hier nach der obigen Definition *kein* Mündungssektor, obwohl dieser ausschliesslich über einen Inputstrom verfügt. Es ist also wohl sinnvoller, Mündungs- und Quellsektoren als Sektoren ohne Output- beziehungsweise Inputströme zu definieren.

2.4 Einbezug des ungerichteten Graphen: Konnexitätsmatrix

Zur Vervollständigung des Bildes unserer Volkswirtschaft wird nun ausserdem der ungerichtete Graph in die Betrachtung mit einbezogen. Dabei interessiert nur noch, ob zwischen zwei Sektoren überhaupt eine Lieferbeziehung existiert, während deren Richtung hier keine Rolle mehr spielt. Die **Adjazenzmatrix des ungerichteten Graphen** \bar{W} ergibt sich durch Boolesche Addition¹ der Adjazenzmatrix des gerichteten Graphen W mit ihrer Transponierten:

$$\bar{W} = W \oplus W^T$$

Sei nun $A \otimes B$ das übliche Matrixprodukt von A und B, wobei allerdings die vorkommenden Additionen und Multiplikationen durch ihre Booleschen Substitute zu ersetzen sind. Dann lässt sich für $\bar{W}^{\otimes m} := \bar{W}^{\otimes m-1} \otimes \bar{W} = \bar{W} \otimes \bar{W}^{\otimes m-1}$, wobei als Konvention $\bar{W}^{\otimes 1} := \bar{W}$ festgelegt wird, analog zum gerichteten Fall der folgende Satz beweisen:

2.4.1 Satz: *Ein Koeffizient $\bar{w}_{ij}^{(m)}$ von $\bar{W}^{\otimes m}$ ist genau dann gleich 1, wenn die Sektoren s_i und s_j im ungerichteten Graphen durch einen Weg der Länge m miteinander verbunden sind.*

2.4.2 Definition: *Die **Dependenzmatrix des ungerichteten Graphen** (Verbundenheitsmatrix) $H = (h_{ij})_{i,j=1\dots n} \in M(n \times n; \{0, 1\})$ wird wie folgt definiert:*

$$h_{ij} = \begin{cases} \bar{w}_{ij}^{(1)} \oplus \bar{w}_{ij}^{(2)} \oplus \dots \oplus \bar{w}_{ij}^{(n-1)} & \text{falls } i \neq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Unter $\bar{w}_{ij}^{(m)}$ ist der entsprechende Koeffizient der Matrix $\bar{W}^{\otimes m}$ zu verstehen.

$h_{ij} = 1$ bedeutet, dass die Sektoren s_i und s_j im ungerichteten Graphen direkt oder indirekt miteinander verbunden sind.

¹Zwecks Beibehaltung der binären Struktur wird hier mit Booleschen Operationen gearbeitet:

Boolesche Addition:	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding: 2px 5px;">\oplus</td><td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td></tr> </table>	\oplus	0	1	0	0	1	1	1	1	Boolesche Multiplikation:	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding: 2px 5px;">\otimes</td><td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td></tr> </table>	\otimes	0	1	0	0	0	1	0	1
\oplus	0	1																			
0	0	1																			
1	1	1																			
\otimes	0	1																			
0	0	0																			
1	0	1																			

Für unser Beispiel erhalten wir:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wie bereits aus dem Graph ersichtlich war, sind alle Sektoren miteinander verbunden.

Mittels der beiden so errichteten Dependenzmatrizen lässt sich nun der Verflechtungsgrad der vorliegenden Wirtschaftssektoren in der sogenannten Konnexitätsmatrix K auf einfache Weise darstellen:

2.4.3 Definition: Die **Konnexitätsmatrix** $K = (k_{ij})_{i,j=1\dots n} \in M(n \times n; \{0, 1, 2, 3\})$ wird wie folgt definiert:

$$K := C + C^T + H$$

2.4.4 Definition: Zwei Sektoren s_i und s_j heißen

- (i) **isoliert**, falls $k_{ij} = 0$,
- (ii) **quasizusammenhängend**, falls $k_{ij} = 1$,
- (iii) **unilateral zusammenhängend**, falls $k_{ij} = 2$,
- (iv) **bilateral zusammenhängend**, falls $k_{ij} = 3$,

wobei k_{ij} für den entsprechenden Koeffizienten der Konnexitätsmatrix K steht.

Während zwischen isolierten Sektoren keine Verknüpfung existiert, gibt es zwischen quasizusammenhängenden Sektoren zwar eine Verknüpfung, allerdings weder in der einen noch in der anderen Richtung einen durchgehenden (gerichteten) Lieferpfad. Beim unilateralen Zusammenhang existiert ein Lieferpfad in

nur einer Richtung, während die bilateral zusammenhängenden Sektoren gegenseitig durch durchgehende Lieferverbindungen miteinander verbunden sind. Eine Menge bilateral zusammenhängender Sektoren wird auch *total zirkulär* genannt.

Die Tatsache, dass in unserem Modellbeispiel die Verbundenheitsmatrix H und folglich auch die Konnexitätsmatrix K ausserhalb der Hauptdiagonalen keine Nullkoeffizienten aufweisen, drückt das Fehlen von isolierten Sektoren aus.

2.5 Die Kondensation des Graphen: Gruppierung in bilaterale Komponenten

Als weiterer Verdichtungsschritt zur besseren Einsicht in die Verflechtungsstruktur werden nun jene Sektoren zu Teilmengen zusammengefasst, welche gegenseitig bilateral zusammenhängen.

2.5.1 Definition: Eine Menge von Sektoren $B \neq \emptyset$ heisst **bilaterale Komponente** : $\iff \forall i$ mit $s_i \in B$ und $\forall j$ mit $s_j \notin B$ gilt $k_{ij} \neq 3$, wobei unter k_{ij} der entsprechende Koeffizient der Konnexitätsmatrix K zu verstehen ist.

Besteht B aus nur einem oder aus allen Sektoren, so spricht man von einer **unechten**, andernfalls von einer **echten** bilateralen Komponente.

Wiederum erscheinen die diesbezüglichen Definitionen von Holub und Schnabl ([4, S. 193]) sowie Hauke ([3, S. 55]) zu wenig präzise, weil beide eine Menge von Sektoren als bilaterale Komponente bezeichnen, wenn alle ihre Elemente gegenseitig bilateral zusammenhängend sind. Es ist dabei allerdings nie garantiert, dass eine solche Komponente wirklich maximal ist, das heisst dass sie nach aussen höchstens noch unilaterale Beziehungen zulässt. Diese Charakteristik muss allerdings für die weitere Analyse vorausgesetzt werden können.

Nehmen wir beispielsweise an, in einer zu untersuchenden Volkswirtschaft seien die Sektoren s_1, s_2, s_3 und s_4 paarweise bilateral zusammenhängend. Die Definitionen in der erwähnten Literatur würden nun bilaterale Komponenten wie $\{s_1, s_2\}$ oder $\{s_3, s_4\}$ zulassen, was wenig sinnvoll ist.

Die Idee hinter dieser Aufteilung der Sektormenge liegt darin, dass die so zusammenzufassenden Sektoren bereits dermassen eng verknüpft sind, dass sie

vereinfachend als ein einziger Sektor betrachtet werden können. Dies wiederum senkt im Allgemeinen die Komplexität des Graphen, so dass dessen Struktur besser ersichtlich wird.

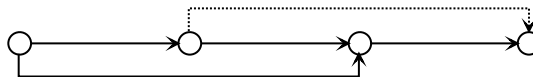
Eine Verknüpfung von einer Komponente zur anderen ergibt sich genau dann, wenn mindestens ein Sektor aus der ersten mit mindestens einem Sektor aus der anderen Komponente durch eine direkte Lieferbeziehung verbunden ist. Per Konstruktion können dabei zwischen den einzelnen Komponenten keine Lieferzyklen auftreten, weil alle in einem Zyklus vorkommenden Sektoren notwendigerweise bilateral miteinander verknüpft wären.

Sieht man von isolierten (d. h. nicht mit anderen Komponenten verknüpften) Komponenten ab, so lassen sich nun grundsätzlich folgende drei Strukturtypen unterscheiden:

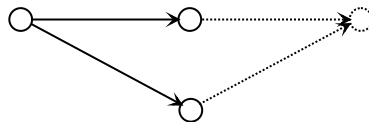
- (i) **(Eingleisig) linearer Typ:** Alle Komponenten sind unilateral zusammenhängend, weisen aber jeweils höchstens einen Input- und/oder Outputstrom auf. Beispiel:



- (ii) **Mehrgleisig linearer Typ:** Alle Komponenten sind unilateral zusammenhängend, und es gibt Komponenten, welche mehr als einen Input- respektive Outputstrom aufweisen. Beispiel:



- (iii) **Quasizusammenhängender Typ:** Mindestens zwei Komponenten sind nicht unilateral, sondern nur quasizusammenhängend. Beispiel:



Es ist nun möglich, das so erhaltene Kondensat als Ausgangspunkt zu nehmen, um erneut gemäss dem bisher beschriebenen Vorgehen die entsprechenden Adjazenz-, Entfernungs-, Dependenz- und Konnexitätsmatrizen (W_{cond} , E_{cond} , C_{cond} , H_{cond} und K_{cond}) zu bestimmen.

Aus der Konnexitätsmatrix unseres Beispiels

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \mathbf{3} & 0 & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & 0 & \mathbf{3} & \mathbf{3} & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & 0 & \mathbf{3} & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & \mathbf{3} & \mathbf{3} & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \mathbf{3} & 0 & \mathbf{3} & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \mathbf{3} & \mathbf{3} & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & \mathbf{3} \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{3} & 0 \end{pmatrix}$$

ist die vorzunehmende Einteilung in folgende vier bilateralen Komponenten unmittelbar ersichtlich:

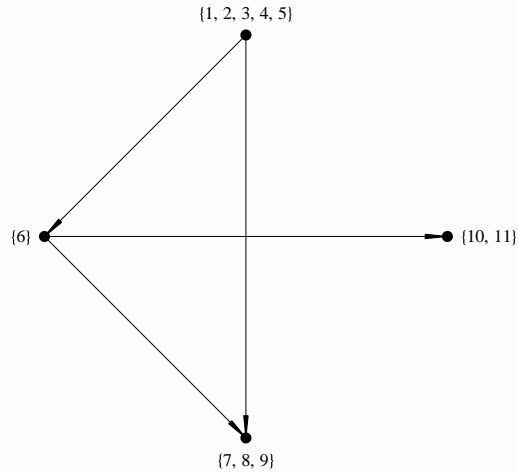
$$B_1 = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$$

$$B_2 = \{s_6\}$$

$$B_3 = \{s_7, s_8, s_9\}$$

$$B_4 = \{s_{10}, s_{11}\}$$

Wir erhalten den Graphen sowie die Strukturmatrizen wie folgt:



W_{cond}	B_1	B_2	B_3	B_4	E_{cond}	B_1	B_2	B_3	B_4	C_{cond}	B_1	B_2	B_3	B_4
B_1	0	1	1	0	B_1	0	1	1	2	B_1	0	1	1	1
B_2	0	0	1	1	B_2	0	0	1	1	B_2	0	0	1	1
B_3	0	0	0	0	B_3	0	0	0	0	B_3	0	0	0	0
B_4	0	0	0	0	B_4	0	0	0	0	B_4	0	0	0	0
H_{cond}	B_1	B_2	B_3	B_4	K_{cond}	B_1	B_2	B_3	B_4					
B_1	0	1	1	1	B_1	0	2	2	2					
B_2	1	0	1	1	B_2	2	0	2	2					
B_3	1	1	0	1	B_3	2	2	0	1					
B_4	1	1	1	0	B_4	2	2	1	0					

Es liegt hier also ein quasizusammenhängender Strukturtyp vor.

2.6 Wirtschaftspolitische Ansatzpunkte: Inputbasis und Mündungskomponenten

Es ist unter anderem das Ziel der qualitativen Input-Output-Analyse, jene Sektoren zu finden, von welchen aus sich konjunkturfördernde Massnahmen möglichst effizient auf die übrigen Wirtschaftsbereiche auswirken. Konkret bedeutet das, eine Menge von Sektoren so auszuwählen, dass von jedem anderen Sektor aus eine Lieferverknüpfung zu mindestens einem ihrer Elemente existiert, ohne dass aber die ausgewählten Sektoren untereinander durch einen durchgehenden Lieferweg verbunden wären:

2.6.1 Definition: Eine Menge von Sektoren $I \neq \emptyset$ heisst **Input-Basis** $:\Leftrightarrow \forall i$ mit $s_i \notin I \quad \exists j$ mit $s_j \in I$, so dass $c_{ij} = 1$, und $k_{pq} \leq 1 \quad \forall p, q, p \neq q$, mit $s_p, s_q \in I$.
 c_{ij} und k_{pq} stehen für die entsprechenden Koeffizienten der Dependenzmatrix C beziehungsweise der Konnexitätsmatrix K .

Im oben eingeführten kondensierten Graphen genügt es, die m Mündungskomponenten $(B_{i_j})_{j=1\dots m}$ zu bestimmen. Darunter sind gemäss der Bemerkung auf Seite 10 jene Komponenten zu verstehen, welche über keinen Outputstrom verfügen. Liegt ein linearer Strukturtyp vor, so gibt es genau eine Mündungskomponente, während beim quasizusammenhängenden Typ durchaus mehrere vorkommen können. Die Menge aller möglichen Input-Basen ergibt sich schliesslich aus deren kartesischem Produkt $B_{i_1} \times B_{i_2} \times \dots \times B_{i_m}$.

Der kondensierte Graph im Modellbeispiel besitzt die Mündungskomponenten B_3 und B_4 . Demnach sind die Elemente von $B_3 \times B_4 = \{(s_7, s_{10}), (s_7, s_{11}), (s_8, s_{10}), (s_8, s_{11}), (s_9, s_{10}), (s_9, s_{11})\}$ Input-Basen der vorliegenden Sektorkonfiguration.

2.7 Strukturmasse II: Der Trade-Off zwischen Geschwindigkeit und Vollständigkeit

Durch die oben beschriebene Auswahl einer Input-Basis als Ansatzpunkt für wirtschaftspolitische Massnahmen wird dem Kriterium der *Vollständigkeit* Rechnung getragen. Es wird gewährleistet, dass alle Wirtschaftssektoren durch die fortschreitende Nachfragewirkung vom Eingriff profitieren können.

Ein nicht zu vernachlässigendes Kriterium ist allerdings auch die *Geschwindigkeit*, mit welcher diese Fortschreitung vor sich geht. Idealerweise sollten möglichst schnell möglichst viele Wirtschaftszweige erreicht werden können. Aufgrund der konfliktären Beziehung zwischen Breitenwirkung und Geschwindigkeit ist dies allerdings im Allgemeinen nicht möglich.

Um den Begriff der Geschwindigkeit genauer zu charakterisieren, wird vereinfachend angenommen, dass sich die Nachfragewirkung pro Zeitperiode genau um die Distanz einer direkten Lieferbeziehung ausdehnt. Kommt also ein Wirtschaftssektor zu einem bestimmten Zeitpunkt in den Genuss einer erhöhten Nachfrage, so wird er diese innerhalb einer Periode an jene Sektoren weitergeben können, welche im (unkondensierten) Graphen durch einen direkten Pfeil mit ihm verbunden sind. Der Zeitbedarf der Ausdehnung wird also mit der Entfernung im Graphen gleichgesetzt. Es wird dabei implizit angenommen, dass die Unternehmen auf keinerlei Lagerbestände zurückgreifen können.

Eine Beurteilung der Zulässigkeit solch starker Vereinfachungen hängt sehr stark davon ab, welche Fragestellungen untersucht werden. Wie Kleine und Meyer ([6, S. 134]) berechtigterweise erwähnen, ist dieser Ansatz zur konkreten Abschätzung von sektoriellen Auswirkungen eines Konjunkturprogramms wohl zu restriktiv, für eine allgemeine Untersuchung der Ordnung einer Produktionsstruktur allerdings akzeptabel. Kommt dazu, dass die im Vorleistungsbereich auftretenden Güter in der Regel besser transportierbar und breiter einsetzbar sind als beispielsweise Investitionsgüter, so dass diese Annahmen wenigstens näherungsweise gerechtfertigt sind (vgl. [4, S. 196]).

Aus diesen Überlegungen ergeben sich folgende Definitionen:

2.7.1 Definitionen: Sei n die gesamte Sektorzahl, m die Anzahl Mündungskomponenten und $v_a(r)$ die Zahl der Sektoren, welche einer fixierten Input-Basis innerhalb eines gegebenen Entfernungsradius r vorgelagert sind.

Dann heissen

- (i) $v_r(r) := \frac{v_a(r)}{n-m}$ **relative Vollständigkeit**,
- (ii) $r_v := \min_{r \in \mathbb{N}} \{r : v_r(r) = 1\}$ **Vollständigkeitsradius** und
- (iii) $z := \frac{r_v}{n-m}$ **Zentralitätsmass**

des Graphen bezüglich der gewählten Input-Basis.

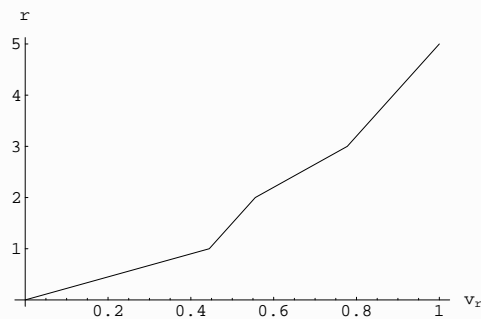
Man beachte, dass $z \in [0, 1]$ und $z = 1$ genau dann, wenn ein (eingleisig) linearer Strukturtyp vorliegt.

Es ist somit offensichtlich, dass zwischen Geschwindigkeit und Vollständigkeit wie bereits erwähnt grundsätzlich ein Trade-Off besteht, welcher umso ausgeprägter ist, je grösser der Vollständigkeitsradius respektive das Zentralitätsmass ausfallen.

Gehen wir im Modellbeispiel von der Input-Basis (s_9, s_{10}) aus, so lässt sich die Beziehung zwischen relativer Vollständigkeit und Radius wie folgt darstellen (Bezeichnungen wie in Definition 2.7.1, $n = 11$, $m = 2$):

r	erreichte Sektoren	$v_a(r)$	$v_r(r)$
1	S₆, S₇, S₈, S₁₁	4	$\frac{4}{9}$
2	S₁, S₆, S₇, S₈, S₁₁	5	$\frac{5}{9}$
3	S₁, S₂, S₅, S₆, S₇, S₈, S₁₁	7	$\frac{7}{9}$
4	S₁, S₂, S₄, S₅, S₆, S₇, S₈, S₁₁	8	$\frac{8}{9}$
5	S₁, S₂, S₃, S₄, S₅, S₆, S₇, S₈, S₁₁	9	1

Grafisch sieht diese Abhängigkeit wie folgt aus:



Das Zentralitätsmass beträgt hier $z = \frac{5}{9}$.

3 Praktische Anwendung

In diesem Teil soll nun das entwickelte Instrumentarium an empirischen Daten angewandt werden. Als Grundlage dienen hierfür die von Prof. Dr. Reiner Wolff zu zehn Sektoren aggregierten Vorleistungsmatrizen der BRD für die Jahre 1970 und 1980:²

Sektor	Bezeichnung	Inhalt
1	Landwirtschaft	Landwirtschaft
2	Energie, Bergbau	Elektrizität, Gasverteilung, Wasserverteilung, Kohlebergbau, sonstiger Bergbau, Erdölgewinnung
3	Grundstoffe, Produktionsgüter	Chemie, Mineralöl, Kunststoffe, Gummi/Asbest, Steine, Feinkeramik, Glas, Stahl, Nichtedelmetalle, Giesserei
4	Investitionsgüter	Stahlbau, Fahrzeugbau, Maschinenbau, Kraftwagen, EDV-Waren (Büromaschinen, Datenverarbeitungsgeräte und -einrichtungen), Elektrotechnik, Feinmechanik/Optik, EBM-Waren (Eisen-, Blech- und Metallwaren)
5	Verbrauchsgüter	Holz, Papiererzeugung, Papierverarbeitung, Leder, Textil, Bekleidung
6	Nahrungs- und Genussmittel	Nahrungsmittel, Milchprodukte, Fleisch, Getränke, Tabakwaren
7	Bauwirtschaft	Bauwirtschaft
8	Handel, Verkehr	Grosshandel, Einzelhandel, Eisenbahn, Schifffahrt, übriger Verkehr
9	übrige Dienstleistungen	Nachrichten, Banken, Versicherungen, Gaststätten, Verlagswesen, Gesundheit, Wohnungsvermietung, sonstige Dienstleistungen, private Haushalte
10	Staat	Staat

²Quelle: Rheinisch-Westfälisches Institut für Wirtschaftsforschung, Essen

Daraus ergeben sich die Vorleistungsmatrizen

$$X_{1970} = \begin{pmatrix} 13934 & 148 & 1067 & 61 & 5315 & 33768 & 192 & 65 & 3849 & 964 \\ 562 & 14010 & 22435 & 2628 & 1767 & 963 & 607 & 2843 & 2370 & 1024 \\ 4075 & 4005 & 102283 & 56799 & 9524 & 3004 & 24117 & 9902 & 5509 & 8125 \\ 1259 & 3034 & 5627 & 53411 & 2746 & 1755 & 15330 & 8581 & 4767 & 8543 \\ 469 & 681 & 5804 & 4978 & 32634 & 2166 & 8292 & 5279 & 5233 & 4246 \\ 6042 & 93 & 1586 & 243 & 615 & 20481 & 58 & 1516 & 12398 & 2304 \\ 283 & 544 & 139 & 149 & 47 & 73 & 390 & 830 & 830 & 1095 \\ 4182 & 2143 & 21350 & 9869 & 7293 & 6853 & 6794 & 7409 & 7087 & 4870 \\ 1778 & 1563 & 5647 & 8687 & 3399 & 1917 & 6812 & 24593 & 38808 & 21001 \\ 72 & 90 & 405 & 484 & 173 & 193 & 138 & 469 & 1908 & 4148 \end{pmatrix}$$

und

$$X_{1980} = \begin{pmatrix} 13697 & 61 & 1101 & 57 & 5410 & 41072 & 259 & 271 & 7801 & 1650 \\ 744 & 14913 & 25101 & 3666 & 2275 & 1506 & 935 & 3817 & 3916 & 1744 \\ 4459 & 3745 & 1150077 & 54934 & 9147 & 3707 & 29365 & 12525 & 13522 & 14240 \\ 1222 & 3295 & 6455 & 61426 & 2301 & 1967 & 20073 & 11151 & 12651 & 19819 \\ 403 & 512 & 5180 & 4144 & 25068 & 2114 & 10716 & 7438 & 9884 & 5987 \\ 9132 & 77 & 1535 & 206 & 660 & 20305 & 50 & 1346 & 15456 & 2552 \\ 1001 & 919 & 500 & 542 & 145 & 299 & 2583 & 629 & 1267 & 2048 \\ 5290 & 2389 & 20594 & 11433 & 7315 & 10822 & 2015 & 5389 & 4237 & 1809 \\ 5088 & 3456 & 15642 & 26976 & 8291 & 7540 & 5060 & 21881 & 59123 & 33633 \\ 350 & 399 & 1522 & 2211 & 639 & 1185 & 133 & 553 & 2829 & 5009 \end{pmatrix}$$

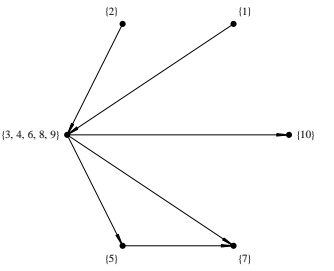
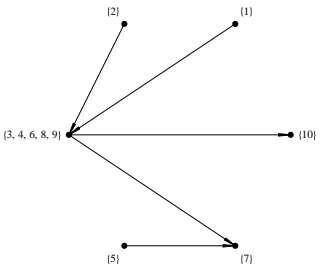
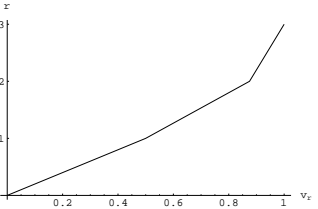
Um eine gewisse Vergleichbarkeit zu garantieren, wird wie bereits erwähnt die Filterschwelle FS hier nun so angesetzt, dass von den nicht auf der Hauptdiagonalen liegenden Strömen jeweils die zwanzig grössten berücksichtigt werden. Für 1970 ergibt dies einen Wert von $FS_{1970} = 6852$, für 1980 $FS_{1980} = 10715$. Auf diese Weise wird gewährleistet, dass die Graphen in ihrer Komplexität übereinstimmen (es gibt jeweils genau 20 Pfeile).

Mit diesem Ansatz erhalten wir die in der folgenden Tabelle wiedergegebenen Resultate. Für beide Fälle gleichlautende Werte sind in die Mitte gesetzt.

	1970	1980
W	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D^G	98	78
D^d	1.88462	1.73333
$(R_k^I)_{k=1\dots 10}$	(0, 0, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 3, 3)	(0, 0, 3, 3, 0, 3, 4, 3, 2, 3)
$(R_k^O)_{k=1\dots 10}$	(4, 3, 2, 2, 1, 3, 0, 2, 2, 0)	(4, 3, 2, 2, 1, 3, 0, 2, 2, 0)
\bar{R}^I	2.7	2.1
\bar{R}^O	1.9	

Bei der Kondensation der Graphen erhalten wir:

	$B_1 = \{s_1\}$ $B_2 = \{s_2\}$ $B_3 = \{s_3, s_4, s_6, s_8, s_9\}$ $B_4 = \{s_5\}$ $B_5 = \{s_7\}$ $B_6 = \{s_{10}\}$	
		
Inputbasen	$\{\{7,10\}\}$	
		
z	0.375	

Hierzu können nun folgende Beobachtungen angestellt werden:

- Trotz der Restriktion auf die jeweils zwanzig grössten Güterströme treten keine isolierten Sektoren auf. Die Sektoraggregate nehmen also relativ ausgewogen an den Lieferverflechtungen teil.

- In beiden Fällen verfügen die Sektoren *Landwirtschaft* und *Industrie*, *Bergbau* über keine Inputströme. Im Jahr 1980 kommt hier noch der Sektor *Verbrauchsgüter* dazu. Letzterer scheint somit in dieser Zeitspanne an Bedeutung verloren zu haben.
- Sowohl 1970 als auch 1980 ergeben sich dieselben bilateralen Komponenten. Die Kernstruktur des Wirtschaftssystems hat sich somit offensichtlich nicht grundlegend verändert.
- Die beiden Mündungssektoren *Bauwirtschaft* und *Staat* bilden je eine unechte bilaterale Komponente und stellen somit zusammen die einzig mögliche Input-Basis dar.
- Jegliche Strukturkennziffern sind im vorliegenden Zeitintervall entweder konstant geblieben oder haben abgenommen. Die Sektoren scheinen somit im Durchschnitt im Jahr 1980 kompakter angeordnet zu sein.

4 Zusammenfassende Bemerkungen

Zusammenfassend können zu den Vor- und Nachteilen der beschriebenen Analyse folgende Bemerkungen gemacht werden:

- Die qualitative Input-Output-Analyse abstrahiert von konkreten, empirisch erhobenen Daten und extrahiert die essentiellen Strukturinformationen einer vorgegebenen Input-Output-Tabelle. Sie erlaubt die Verdichtung einer Vorleistungsmatrix zu einem überblickbaren Graphen. Die Zusammenhänge im Wirtschaftssystem können bildlich dargestellt werden.
- Diese Abstraktion geschieht durch die Auswahl einer Filterschwelle, welche relevante von irrelevanten Güterströmen trennt. Die in der Natur dieses Ansatzes liegende Willkür schränkt die Objektivität einer solchen Analyse ein. Auch wenn die festzulegende Filterschwelle aus den vorgegebenen Daten hergeleitet wird, ist es gerade bei vergleichenden Untersuchungen nicht evident, jede zu analysierende Vorleistungsmatrix mit gleichen Massstäben zu behandeln. Es ist für jede zu tätige Analyse speziell eine Filterschwelle so festzulegen, dass der Informationsgehalt des Resultats den zu setzenden Anforderungen entspricht. Allgemeingültige Lösungen existieren keine.
- Die Bestimmung einer Input-Basis als Ansatzpunkt für wirtschaftspolitische Massnahmen ist sehr einfach durchzuführen. Insbesondere kann die Beziehung zwischen Breitenwirkung (Vollständigkeit) und Verzögerungszeit (Geschwindigkeit) eines solchen Nachfrageimpulses modelliert werden. Aufgrund der zahlreichen Vereinfachungen dieses Ansatzes – zum Beispiel was die zeitliche „Entfernung“ verschiedener Sektoren betrifft – ist jedes Resultat entsprechend zu relativieren.
- Aus den erwähnten Gründen ist es nicht sinnvoll, die qualitative Input-Output-Analyse als einzig ausschlaggebendes Kriterium zu einer politischen Entscheidungsfindung einzusetzen. Ihre Stärke liegt vielmehr darin, ein Gesamtbild der Struktur eines Wirtschaftssystems zu liefern, welches anschliessend als Grundlage für detailliertere quantitative Untersuchungen dienen kann. Die qualitative Input-Output-Analyse versteht sich somit nicht als Ersatz für quantitative Berechnungen, sondern als deren Ergänzung.

A Literaturverzeichnis

- [1] *Busacker, R. G., Saaty, T. L.*, Finite Graphs and Networks: An Introduction with Applications, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [2] *Czayka, L.*, Qualitative Input-Output-Analyse, Bd. 42 von *Schriften zur wirtschaftswissenschaftlichen Forschung*, Meisenheim am Glan, 1972.
- [3] *Hauke, W.*, Darstellung struktureller Zusammenhänge und Entwicklungen in Input-Output-Tabellen, Bd. 37 von *Quantitative Ökonomie*, Eul, Bergisch Gladbach/Köln, 1992.
- [4] *Holub, H.-W., Schnabl, H.*, Input-Output-Rechnung: Input-Output-Tabellen : Einführung, Oldenbourg, München/Wien, 3., unveränd. Aufl., 1994.
- [5] *Holub, H. W., Schnabl, H., Tappeiner, G.*, Qualitative Input-Output-Analysis with Variable Filter, in: *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft*, Bd. 141 (1985), Nr. 2, S. 282–300.
- [6] *Kleine, E., Meyer, B.*, Qualitative oder quantitative Input-Output-Analyse für die Konjunkturpolitik?, in: *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft*, Bd. 138 (1982), Nr. 1, S. 129–145.
- [7] *Schnabl, H., Holub, H. W.*, Qualitative und quantitative Aspekte der Input-Output-Analyse, in: *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft*, Bd. 135 (1979), Nr. 4, S. 657–678.

Das vom Autor zur Durchführung der erwähnten Berechnungen und Generierung der einzelnen Grafiken geschriebene MATHEMATICA-Notebook `graph.nb` steht unter der folgenden Internet-Adresse zur Verfügung:

<http://www-student.unifr.ch/E-97/BeerMi/Pub/graph/>