Graphentheoretische Strukturanalyse von Input-Output-Tabellen

korrigierte Version

Michael Beer

14. Januar 2000

Notation: *Wir bezeichnen mit* $X = (x_{ij})_{i,j=1\ldots n} \in M(n \times n; \mathbb{R}^+ \cup \{0\})$[1] *die vorgegebene* $n \times n$*-dimensionale Vorleistungsmatrix mit nicht-negativen Einträgen.*

Die n *betrachteten Wirtschaftssektoren werden mit* $(s_i)_{i=1\ldots n}$ *notiert.*

Definition: *Unter der* ***Matrix der direkten Lieferbeziehungen*** *bzw.* ***Adjazenzmatrix des gerichteten Graphen*** *verstehen wir die Matrix* $W = (w_{ij})_{i,j=1\ldots n} \in M(n \times n; \{0,1\})$*, welche wie folgt definiert ist:*

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_{ij} > FS \text{ und } i \neq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

FS *steht für die entsprechend zu wählende* ***Filterschwelle****.*

Satz: *Sei* W *die oben definierte Adjazenzmatrix. Dann ergibt ein Koeffizient* $w_{ij}^{(m)}$ *der Matrix* W^m *die Anzahl Lieferwege der Länge* m *vom Sektor* s_i *zum Sektor* s_j*.*

Definition: *Die* ***Entfernungsmatrix*** $E = (e_{ij})_{i,j=1\ldots n} \in M(n \times n; \{0, 1 \ldots n-1\})$ *wird wie folgt definiert:*

$$e_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i = j \text{ oder } w_{ij}^{(m)} = 0 \quad \forall m \in \{1, 2 \ldots n-1\} \\ \min\limits_{m=1,2\ldots n-1} \{m : w_{ij}^{(m)} > 0\} & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $w_{ij}^{(m)}$ *für den entsprechenden Koeffizienten der Matrix* W^m *steht.*

Definition: *Die* ***Dependenzmatrix*** $C = (c_{ij})_{i,j=1\ldots n} \in M(n \times n; \{0,1\})$ *wird wie folgt definiert:*

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } e_{ij} > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei e_{ij} *für den entsprechenden Koeffizienten der Entfernungsmatrix* E *steht.*

[1] $M(n \times m; S) = n \times m$-dimensionale Matrix mit Elementen aus S

Satz: *Sei* $\bar{W}^{\otimes 1} := \bar{W} := W \oplus W^T$ *und* $\bar{W}^{\otimes m} := \bar{W}^{\otimes m-1} \otimes \bar{W} = \bar{W} \otimes \bar{W}^{\otimes m-1}$. *Ein Koeffizient* $\bar{w}_{ij}^{(m)}$ *von* $\bar{W}^{\otimes m}$ *ist genau dann gleich 1, wenn die Sektoren* s_i *und* s_j *im ungerichteten Graphen* **[durch einen Weg der Länge m]**[2] *miteinander verbunden sind.*[3]

Definition: *Sei* $\bar{W} := W \oplus W^T$. *Die Dependenzmatrix des ungerichteten Graphen* $H = (h_{ij})_{i,j=1\ldots n} \in M(n \times n; \{0,1\})$ *wird wie folgt definiert:*

$$h_{ij} = \begin{cases} \bar{w}_{ij}^{(1)} \oplus \bar{w}_{ij}^{(2)} \oplus \ldots \oplus \bar{w}_{ij}^{(n-1)} & \text{falls } i \neq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition: *Die* ***Konnexitätsmatrix*** $K = (k_{ij})_{i,j=1\ldots n} \in M(n \times n; \{0,1,2,3\})$ *wird wie folgt definiert:*

$$K := C + C^T + H$$

Definition: *Zwei Sektoren* s_i *und* s_j *heissen*

(i) ***isoliert***, *falls* $k_{ij} = 0$,

(ii) ***quasizusammenhängend***, *falls* $k_{ij} = 1$,

(iii) ***unilateral zusammenhängend***, *falls* $k_{ij} = 2$,

(iv) ***bilateral zusammenhängend***, *falls* $k_{ij} = 3$,

wobei k_{ij} *für den entsprechenden Koeffizienten der Konnexitätsmatrix* K *steht.*

Definition: *Eine Menge von Sektoren* $B \neq \emptyset$ *heisst* ***bilaterale Komponente*** $:\Longleftrightarrow \forall\, i$ *mit* $s_i \in B$ *und* $\forall\, j$ *mit* $s_j \notin B$ *gilt* $k_{ij} < 3$.

Besteht B *aus nur einem oder aus allen Sektoren, so spricht man von einer* ***unechten***, *andernfalls von einer* ***echten*** *bilateralen Komponente.*

Definition: *Eine Menge von Sektoren* $I \neq \emptyset$ *heisst* ***Input-Basis*** $:\Longleftrightarrow \forall\, i$ *mit* $s_i \notin I \quad \exists\, j$ *mit* $s_j \in I$, *so dass* $c_{ij} = 1$, *und* $h_{kl} < 2 \quad \forall\, k, l,\, k \neq l$, *mit* $s_k, s_l \in I$.

Definitionen: *Sei* n *die gesamte Sektorzahl,* m *die Anzahl Elemente der Input-Basis und* $v_a(r)$ *die Zahl der Sektoren, welche einer Input-Basis innerhalb eines gegebenen Entfernungsradius* r *vorgelagert sind.*

Dann heissen $v_r(r) := \frac{v_a(r)}{n-m}$ ***relative Vollständigkeit***, $r_v := \min\limits_{r \in \mathbb{N}}\{r : v_r(r) = 1\}$ ***Vollständigkeitsradius*** *und* $z := \frac{r_v}{n-m}$ ***Zentralitätsmass*** *des Graphen bezüglich der gewählten Input-Basis.*

Unter `http://www-student.unifr.ch/E-97/BeerMi/Pub/graph/graph.nb` ist ein Mathematica-Notebook verfügbar, mit welchem die obigen Berechnungen für beliebige Vorleistungsmatrizen durchgeführt werden können.

[2] Korrektur gegenüber der im Seminar verteilten Version

[3] $A \oplus B$ steht hier für die übliche Matrixaddition, $A \otimes B$ für das übliche Matrixprodukt von A und B, wobei allerdings die vorkommenden Additionen und Multiplikationen jeweils durch ihre Booleschen Substitute zu ersetzen sind:

Boolesche Addition:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	1

Boolesche Multiplikation:

$\otimes$	0	1
0	0	0
1	0	1