Die schwingende Membran

Michael Beer

1. Februar 2001

Inhaltsverzeichnis

1 Die Differentialgleichung der homogenen schwingenden Membran

Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^2$ (also offen, bogenweise zusammenhängend und nicht leer) mit stückweise glattem Rand $\Gamma := \partial\Omega$. Wir betrachten eine elastische Membran, welche das Gebiet Ω bedeckt und auf dessen Rand Γ fixiert (*eingespannt*) ist. Dabei gehen wir davon aus, dass die Membran aus einem homogenen Material besteht und eine vernachlässigbare Dicke aufweist. Die Membran ist beliebig stetig verformbar, allerdings wirken elastische Kräfte der Verformung zuwider. Weitere externe Kräfte gibt es keine. Wir sprechen von einer eingespannten homogenen schwingenden Membran.

Sei

$$u: \begin{array}{rcl} \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_{\geq 0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, t) & \longmapsto & u(x, y, t) \end{array}$$

die Auslenkung der Membran im Punkt $(x, y) \in \bar{\Omega}$ zur Zeit t. Physikalische Betrachtungen ergeben, dass unter den beschriebenen Bedingungen die Funktion u der folgenden partiellen Differentialgleichung genügen muss:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, y, t) \quad \forall\, (x, y, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}. \tag{1}$$

Durch geeignete Wahl der Zeiteinheit kann davon ausgegangen werden, dass die Materialkonstante $c = 1$ ist. Die Gleichung (1) lässt sich somit wie folgt schreiben:

$$\Delta u = u_{tt}. \tag{2}$$

In diesem Seminar beschränken wir uns zudem auf die spezielle *Dirichlet-Randbedingung*

$$u|_\Gamma = 0. \tag{3}$$

Damit die Lösung eindeutig bestimmt werden kann (vgl. [2, S. 194ff.]), werden wir schliesslich folgende Anfangsbedingungen vorgeben:

$$u(x, y, 0) := f(x, y) \tag{4}$$
$$u_t(x, y, 0) := g(x, y) \tag{5}$$

Die Funktionen $f, g : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ müssen dabei notwendigerweise auf Ω mindestens zweimal partiell differenzierbar sein und auf dem Rand Γ verschwinden.

Es liegt somit ein kombiniertes Rand- und Anfangswertproblem für eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vor.

2 Die allgemeine Lösung

Wir suchen zuerst eine allgemeine Lösung des durch (2)–(5) charakterisierten Problems, ohne uns um die Form des Gebiets Ω zu kümmern. Hierfür machen wir folgenden Ansatz:

Ansatz: $u(x, y, t) = v(x, y)\, w(t)$

Eingesetzt in (2) erhalten wir für v und w die Bedingungen

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\ddot{w}}{w} =: -\lambda.$$

Die Gleichung $\dfrac{\Delta v}{v} = -\lambda$ ist äquivalent zur so genannten *Helmholtz-Gleichung*

$$\Delta v + \lambda v = 0 \tag{6}$$

Es handelt sich hierbei also um ein Eigenwertproblem mit der Randbedingung

$$v(x, y) = 0 \qquad \forall\, (x, y) \in \Gamma.$$

Falls für die Gleichung (6) eine Lösung $v \not\equiv 0$ existiert, lässt sich durch Multiplikation von (6) mit v und Anwendung der Greenschen Formel zeigen, dass für den zugehörigen Parameter λ gilt:

$$\lambda > 0. \tag{7}$$

Indem wir $\mu := \sqrt{\lambda}$ setzen, erhalten wir für die Funktion w somit die Bedingung

$$\ddot{w} + \mu^2 w = 0. \tag{8}$$

Hierfür finden wir – beispielsweise mit Hilfe des ≪charakteristischen Polynoms≫ – die allgemeine Lösung

$$w(t) = a\cos(\mu\, t) + b\sin(\mu\, t) \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Die Lösungen der Gleichung (6) sind abhängig von der Form des Gebiets Ω. Eine explizite Berechnung der Lösungen für den Spezialfall, dass Ω ein Rechteck oder ein Kreis ist, folgt im Abschnitt 3. Allgemein garantiert die Tatsache, dass es sich bei (6) um ein Eigenwertproblem der Form $Lv + \lambda v = 0$ handelt und dass der Differentialoperator $L = \Delta$ selbstadjungiert ist, die Existenz von reellen Eigenwerten

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \quad \text{mit } \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

und zugehörigen Eigenfunktionen

$$\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit } v_n \not\equiv 0 \text{ und } v_n \in \mathcal{D}_L := \{f \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})\,;\, f|_\Gamma = 0\},$$

welche in $L_2(\Omega)$ ein vollständiges orthogonales Funktionensystem bilden. Aus (7) wissen wir ausserdem, dass $\lambda_n > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Somit lässt sich v schreiben als

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, v_n$$

mit geeignet zu wählenden Konstanten $c_n \in \mathbb{R}$. Für u erhalten wir dadurch

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, y)(a_n \cos(\mu_n t) + b_n \sin(\mu_n t)) \quad \text{mit } \mu_n := \sqrt{\lambda_n}.$$

Die Funktionen $u_n(x, y, t) := v_n(x, y)(a_n \cos(\mu_n t) + b_n \sin(\mu_n t))$ sind die so genannten *Eigenschwingungen* der betrachteten Membran. Die Gesamtbewegung der Membran ist somit eine Überlagerung (*Superposition*) von Eigenschwingungen.

In der weiteren Analyse werden uns insbesondere jene Punkte $(x, y) \in \Omega$ interessieren, für welche die Eigenfunktionen $v_n(x, y)$ verschwinden. Längs dieser so genannten *Knotenlinien* bleibt die Membran bei der Ausführung ihrer Eigenschwingungen stets in Ruhe.

Die Koeffizienten a_n und b_n sind durch die Anfangsbedingungen (4) und (5) festgelegt:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_\Omega f(x, y)\, v_n(x, y)\, dV \\ b_n &= \frac{1}{\mu_n \|v_n\|^2} \int_\Omega g(x, y)\, v_n(x, y)\, dV \end{aligned} \tag{9}$$

3 Spezialfälle

3.1 Die rechteckige Membran

Wir betrachten nun den Spezialfall einer rechteckigen eingespannten Membran:

$$\Omega := \{(x, y); 0 < x < a, 0 < y < b\}$$

Die Randbedingungen lauten:

$$\begin{array}{lll} u(x,0,t) = 0 & u(x,b,t) = 0 & 0 \le x \le a; t \ge 0 \\ u(0,y,t) = 0 & u(a,y,t) = 0 & 0 \le y \le b; t \ge 0 \end{array}$$

Wiederum gehen wir vom Ansatz $u(x, y, t) = v(x, y)\, w(t)$ aus und suchen Lösungen für das Eigenwertproblem $\Delta v + \lambda v = 0$, wobei sich die Randbedingungen hier wie folgt schreiben lassen:

$$\begin{array}{lll} v(x,0) = 0 & v(x,b) = 0 & 0 \le x \le a \\ v(0,y) = 0 & v(a,y) = 0 & 0 \le y \le b \end{array}$$

Mit dem Ansatz $v(x, y) = X(x)\, Y(y)$ ist (6) äquivalent zur Gleichung

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\left(\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda\right) =: -\nu. \tag{10}$$

Die linke Seite dieser Gleichung führt zusammen mit den Randbedingungen zum Eigenwertproblem

$$X''(x) + \nu X(x) = 0 \quad \text{mit } X(0) = X(a) = 0.$$

Hierfür finden wir die Eigenwerte $\nu_n = \frac{\pi^2 n^2}{a^2}$ und entsprechenden Eigenfunktionen $X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$. Für die rechte Seite von (10) stellt sich unter Berücksichtigung der soeben berechneten Eigenwerte ν_n das Problem

$$Y''(y) + \underbrace{(\lambda - \nu_n)}_{=:\xi} Y(y) = 0 \quad \text{mit } Y(0) = Y(b) = 0,$$

wofür wir die Eigenwerte $\xi_m = \frac{\pi^2 m^2}{b^2}$ und die Eigenfunktionen $Y_m(y) = \sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right)$ $(m \in \mathbb{N})$ herleiten können.

Insgesamt sind somit

$$\lambda_{nm} = \frac{\pi^2 n^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{b^2} \quad \text{und} \quad v_{nm}(x,y) = \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right) \qquad n, m \in \mathbb{N}$$

die Eigenwerte respektive Eigenfunktionen der Gleichung (6) in unserem Spezialfall. Eine direkte Rechnung ergibt, dass $\langle v_{nm} | v_{pq} \rangle = 0$, falls $(n, m) \neq (p, q)$, und $\|v_{nm}\|^2 = \frac{ab}{4}$.

Unter Einbezug der Funktion $w(t)$ erhalten wir somit die Eigenschwingungen

$$u_{nm}(x, y, t) = (a_{nm} \cos(\mu_{nm} t) + b_{nm} \sin(\mu_{nm} t)) \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right)$$

mit $\mu_{nm} = \sqrt{\lambda_{nm}} = \pi\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}$, und die allgemeine Lösung von (2) finden wir durch Superposition der Eigenschwingungen:

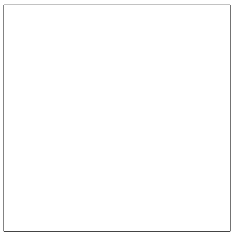
$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \left(a_{nm}\cos(\mu_{nm}t) + b_{nm}\sin(\mu_{nm}t)\right)\sin\left(\tfrac{\pi nx}{a}\right)\sin\left(\tfrac{\pi my}{b}\right)$$

Die Koeffizienten a_{nm} und b_{nm} lassen sich dabei konkret aus den Anfangsbedingungen herleiten:

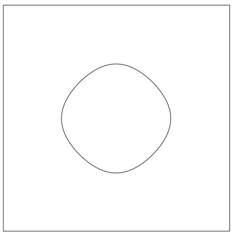
$$a_{nm} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\,v_{nm}(x,y)\,dy\,dx$$

$$b_{nm} = \frac{4}{ab\mu_{nm}}\int_0^a\int_0^b g(x,y)\,v_{nm}(x,y)\,dy\,dx$$

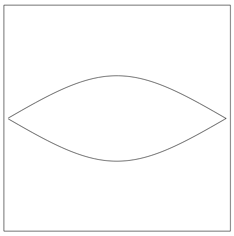
Aus der obigen Formel für λ_{nm} ist ersichtlich, dass je nach Wahl von a und b mehrfache Eigenwerte auftreten können. Sind beispielsweise die Seitenlängen a und b identisch, so gilt $\lambda_{nm} = \lambda_{mn}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Andererseits sagen die Eigenwerte etwas über die Frequenz der zugehörigen Eigenschwingungen aus. Aus dieser Tatsache erwächst die Motivation, Linearkombinationen von Eigenschwingungen mit gleichen Eigenwerten hinsichtlich ihrer Knotenlinien zu untersuchen. Im Folgenden sind für das Quadrat $a = b = \pi$ einige Beispiele dargestellt:



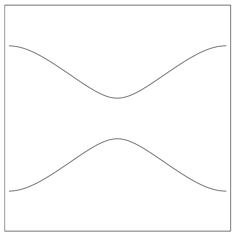
$v_{11} = 0$



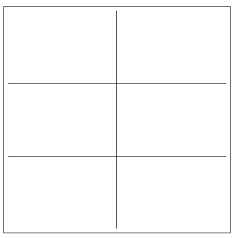
$v_{13} + v_{31} = 0$



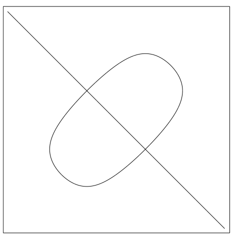
$v_{13} + \frac{1}{3}v_{31} = 0$



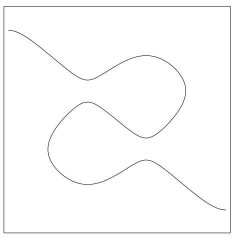
$v_{13} - \frac{2}{3}v_{31} = 0$



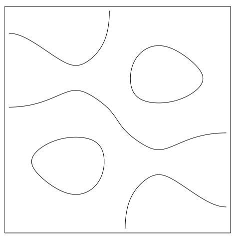
$v_{23} = 0$



$v_{14} + v_{41} = 0$



$v_{14} + \sqrt{\frac{2}{3}}v_{41} = 0$



$v_{25} + \frac{2}{3}v_{52} = 0$

3.2 Die kreisförmige Membran

In einem zweiten Teil wollen wir uns nun dem Spezialfall einer kreisförmigen eingespannten Membran zuwenden. Anstelle der kartesischen Koordinaten (x, y) verwenden wir hierfür die Polarkoordinaten (r, θ). Ausserdem gehen wir davon aus, dass der zu betrachtende Kreis den Radius 1 hat:

$$\Omega := \{(r, \theta); 0 \leq r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Die Rand- und Anfangsbedingungen lauten:

$$\begin{aligned} u(1, \theta, t) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi; t \geq 0 \\ u(r, \theta, 0) = f(r, \theta) \\ u_t(r, \theta, 0) = g(r, \theta) \end{aligned}$$

Entsprechend «übersetzen» wir die Differentialgleichung (2) in Polarkoordinaten und erhalten

$$u_{rr} + \tfrac{1}{r} u_r + \tfrac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = u_{tt}. \tag{11}$$

Durch den Ansatz $u(r, \theta, t) = v(r, \theta)\, w(t)$ ergibt sich die äquivalente Gleichung

$$\frac{v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}}{v} = \frac{\ddot{w}}{w} =: -\lambda.$$

Für das vorliegende Problem von Interesse sind somit die Lösungen von

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} + \lambda v = 0. \tag{12}$$

mit der Randbedingung $v(1, \theta) = 0$ für $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Um diese zu finden, betrachtet man den Ansatz $v(r, \theta) = R(r)\, \Theta(\theta)$, wodurch sich (12) als

$$\frac{r^2 R'' + r R'}{R} + \lambda r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} =: \sigma$$

schreiben und somit in das folgende Differentialgleichungssystem aufteilen lässt:

$$r^2 R'' + r R' + (\lambda r^2 - \sigma) R = 0 \tag{13}$$

$$\Theta'' + \sigma \Theta = 0 \tag{14}$$

Aufgrund der zu fordernden 2π-Periodizität von Θ (die Funktion v wäre sonst nicht eindeutig) erhält man für (14) analog zu (8) die allgemeine Lösung

$$\Theta(\theta) = a \cos(n\theta) + b \sin(n\theta),$$

wobei $n := \sqrt{\sigma}$ allerdings nur nichtnegative ganzzahlige Werte annehmen kann. Durch die Substitution $\rho(r) := r\sqrt{\lambda}$ lässt sich andererseits die Gleichung (13) in die folgende Form bringen:

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} + (\rho^2 - n^2) R = 0 \tag{15}$$

Diese Gleichung wird nach dem deutschen Astronomen Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) als *Besselsche Differentialgleichung* bezeichnet. Ihre Lösungen, die so genannten *Besselschen Funktionen*, können im vorliegenden Spezialfall ($n \in \mathbb{N}_0$) explizit als Potenzreihen angegeben werden:

$$J_n(\rho) = \left(\frac{\rho}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k}$$

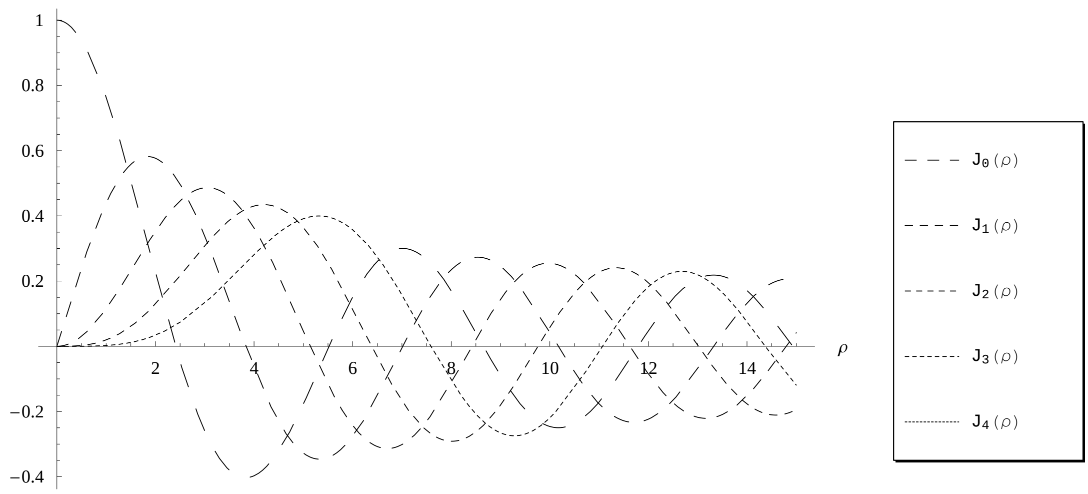


Abbildung 1: Die Besselschen Funktionen nullter bis vierter Ordnung

Die Lösungen von (13) haben somit die Form

$$R(r) = J_n\big(\rho(r)\big) = J_n(\mu r) \qquad \text{mit } \mu = \sqrt{\lambda} \text{ und } n \in \mathbb{N}_0.$$

Indem wir die Randbedingung $R(1) = 0$ mit einbeziehen, ergibt sich für μ die Bedingung

$$J_n(\mu) = 0.$$

Die Eigenwerte $\lambda = \mu^2$ der Gleichung (12) sind somit die Quadrate der (unendlich vielen) Nullstellen $\mu_{n1}, \mu_{n2}, \ldots$ der Besselschen Funktionen J_n, $n \in \mathbb{N}_0$, und die Eigenfunktionen sind von der Form

$$v_{nm}(r,\theta) = J_n(\mu_{nm} r)(a\cos(n\theta) + b\sin(n\theta)).$$

Da a und b beliebige Konstanten sind und $\sin(n\theta) \perp \cos(n\theta)$, $n \in \mathbb{N}_0$, kann jedes v_{nm} in die zwei linear unabhängigen Teile

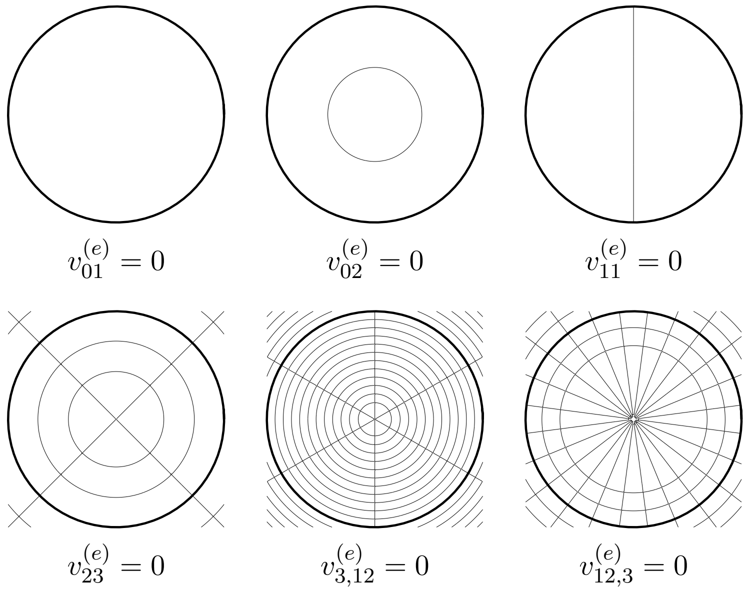
$$v_{nm}^{(e)}(r,\theta) = J_n(\mu_{nm} r)\cos(n\theta) \quad \text{und} \quad v_{nm}^{(0)}(r,\theta) = J_n(\mu_{nm} r)\sin(n\theta)$$

zerlegt werden, welche beide wiederum eine Eigenfunktion von (12) bezüglich des Eigenwerts μ_{nm} darstellen. Wir erhalten somit für die kreisförmige Membran die Eigenschwingungen

$$u_{nm}(r,\theta,t) = \Big(A_{nm} v_{nm}^{(e)}(r,\theta) + B_{nm} v_{nm}^{(0)}(r,\theta)\Big)\cos(\mu_{nm} t) + \Big(C_{nm} v_{nm}^{(e)}(r,\theta) + D_{nm} v_{nm}^{(0)}(r,\theta)\Big)\sin(\mu_{nm} t),$$

welche durch Superposition die Lösung der Schwingungsgleichung (11) ergeben, wobei die Koeffizienten A_{nm}, B_{nm}, C_{nm} und D_{nm} gemäss (9) aus den Anfangsbedingungen herzuleiten sind.

Bei einer kreisförmigen Membran sind die Knotenlinien jeweils Radien (θ = const.) beziehungsweise Kreise (r = const.). Die folgenden Beispiele illustrieren die Nullstellen von $v_{nm}^{(e)}$ für verschiedene Parameter $n, m \in \mathbb{N}$. Der Einheitskreis $S^1 = \partial\Omega$ ist jeweils durch eine dickere Linie hervorgehoben.



Literatur

[1] *Courant, R., Hilbert, D.*, Methoden der Mathematischen Physik I, Heidelberger Taschenbücher Band 30, Springer-Verlag, Berlin, 3. Aufl., 1968.

[2] *Dennemeyer, R.*, Introduction to Partial Differential Equations and Boundary Value Problems, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.